矩形域低光滑解的渐近展开*

黄鸿慈　穆　默　韩渭敏

(中国科学院计算中心)

ASYMPTOTIC EXPANSION FOR NUMERICAL SOLUTION OF A LESS REGULAR PROBLEM IN A RECTANGLE

Huang Hong-ci Mu Mo Han Wei-min

(*Computing Center, Academia Sinica*)

Abstract

For the problem

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where Ω is a rectangle, the solution u belongs to $H^{3-\varepsilon}(\Omega)$, no matter how smooth the right-hand side f is. According to available theories, no asymptotic error expansion for the discrete solution u_h can be obtained. Here we prove, if $f \in C^2(\bar{\Omega})$,

$$u_h = u + Ch^2 + o(h^2) \text{ a. e. in } \Omega.$$

研究外推法用于偏微分方程边值问题数值解的效果及理论,已有[1—6]. [5,6]对有限元任意初始剖分证明了渐近展开,使外推理论向前迈出了新的一步. 进一步的问题是:就实际情况而言,已有理论对光滑性要求仍然过高. 在高光滑解的情况下,高次元可达到线性元外推的效果;在低光滑解的情况下,高次元失效.如果这时线性元仍有渐近展开,则外推将是提高计算效率的极好途径.

[7]作了相当数量的数值试验,结果表明,在非凸区域低光滑解的情况下,外推仍然有效. 对矩形域波哇松方程第一边值问题(齐次边界条件),数值试验表明,渐近展开

$$u_h(x, y) = u(x, y) + c_1(x, y)h^2 + c_2(x, y)h^4 + \cdots$$

在网格点成立. 展开的项数与右端 f 的光滑性有关(注意,不论 f 的光滑性多高, 仍然只有 $u \in H^{3-\varepsilon}(\Omega)$). 本文证明: 当 $f \in C^2(\bar{\Omega})$ 时,存在 $c(x, y) \in L^2(\Omega)$, 满足

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{u_h - u}{h^2} - c(x, y) \right\|_{L^2(\Omega)} = 0,$$

* 1985 年 8 月 24 日收到.

即，存在子序列 u_h，使渐近展式

$$u_h(x, y) = u(x, y) + c(x,y)h^2 + o(h^2)$$

几乎处处成立．与数值试验比较，这一理论结果仍有待改进，但它在光滑性要求上有了新的进展．

设 Ω 为矩形域，不妨假设 $\Omega = \{0 < x < 1, 0 < y < 1\}$．考虑波哇松方程第一边值问题：

$$\begin{cases} -\Delta u = f, \ (x, y) \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

已知(1)的相应特征值问题：

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_n = \lambda_n\varphi_n, \ (x, y) \in \Omega, \\ \varphi_n|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

的解为

$$\begin{cases} \lambda_n = \pi^2(n_1^2 + n_2^2), & (2.a) \\ \varphi_n = \sin n_1\pi x \sin n_2\pi y, & (2.b) \end{cases}$$

$n = (n_1, n_2)$，n_1，n_2 取遍一切正整数．下面记 $|n| = \max\{n_1, n_2\}$．当 $f \in L^2(\Omega)$ 时，

$$f = \sum_n f_n\varphi_n \tag{3}$$

成立，其中

$$f_n = 4 \cdot \int_\Omega f\varphi_n dxdy. \tag{3.a}$$

问题(1)的解可表为

$$u = \sum_n f_n/\lambda_n \cdot \varphi_n. \tag{4}$$

对区域 Ω 进行等距剖分，取步长 $h = 1/N$．利用五点格式进行离散化，得

$$\begin{cases} -\Delta_h u_h = f, \ (x, y) \in \Omega_h, \\ u_h|_{\partial\Omega_h} = 0, \end{cases} \tag{5}$$

其中 Ω_h 表示 Ω 的内节点，$\partial\Omega_h$ 表示边界节点．

下面假定 $f \in C^2(\bar{\Omega})$．如果采用三角线性元离散化，此时 (5) 中右端可通过不同的数值积分方法获得．一般情况下都可表为

$$-\Delta_h u_h = f + h^2D(x, y) + o(h^2), \ (x, y) \in \Omega_h, \tag{5.a}$$

$D(x, y)$ 由 f 的二阶导数确定．先讨论情形(5)．

对于离散特征值问题：

$$\begin{cases} -\Delta_h\varphi_n^h = \lambda_n^h\varphi_n^h, \ (x, y) \in \Omega_h, \\ \varphi_n^h|_{\partial\Omega_h} = 0, \end{cases} \tag{6}$$

有解

$$\begin{cases} \lambda_n^h = 4h^{-2}\left(\sin^2\dfrac{n_1\pi h}{2} + \sin^2\dfrac{n_2\pi h}{2}\right), & (7.a) \\ \varphi_n^h = \sin n_1\pi x \sin n_2\pi y. & (7.b) \end{cases}$$

在 Ω_h 上，由于

$$\sum_{(x,y)\in\Omega_h}\varphi_n(x,y)\varphi_m(x,y)=\begin{cases}0, & n\neq m,\\ N^2/4, & n=m,\end{cases}$$

f 可表为

$$f=\sum_{|n|\leqslant N-1}f_n^h\varphi_n, \tag{8}$$

其中

$$f_n^h=4h^2\sum_{(x,y)\in\Omega_h}f(x,y)\varphi_n(x,y). \tag{8.a}$$

于是，问题(5)的解可表为

$$u_h=\sum_{|n|\leqslant N-1}f_n^h/\lambda_n^h\cdot\varphi_n. \tag{9}$$

以后 u_h 按(9)拓广定义到区域 Ω.

引理. 令 $u=\sum_n a_n\varphi_n$, $u_h=\sum_{|n|\leqslant N-1}a_n^h\varphi_n$, $N=1/h$. 若

(1) $a_n^2|n|^4\leqslant C_n^2$, $\sum_n C_n^2<+\infty$;

(2) $\left|\dfrac{a_n-a_n^h}{h^2}\right|\leqslant A_n$, $\sum_n A_n^2<+\infty$;

(3) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a_n-a_n^h}{h^2}=B_n$ 且 $\sum_n B_n\varphi_n=\Phi$ ($L^2(\Omega)$ 意义)

成立，则

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{u-u_h}{h^2}-\Phi\right\|_{L^2(\Omega)}=0.$$

证明. 由条件(1),(2),(3)知，对任意 $\varepsilon>0$，存在正整数 M，使

$$\sum_{|n|>M}C_n^2<\varepsilon,\quad\sum_{|n|>M}A_n^2<\varepsilon,\quad\sum_{|n|>M}B_n^2<\varepsilon$$

成立. 设 M_0 为 $|n|\leqslant M$ 的项数，由条件(3)，对 ε/M_0，存在 h_0，使当 $h\leqslant h_0$ 时，对一切 $|n|\leqslant M$，成立

$$\left|\frac{a_n-a_n^h}{n^2}-B_n\right|^2\leqslant\varepsilon/M.$$

由

$$\frac{u-u_h}{h^2}-\Phi=\sum_{|n|\leqslant M}\left(\frac{a_n-a_n^h}{h^2}-B_n\right)\varphi_n+\sum_{M<|n|\leqslant N-1}\frac{a_n-a_n^h}{h^2}\varphi_n$$
$$-\sum_{|n|>M}B_n\varphi_n+\frac{1}{h^2}\sum_{|n|>N-1}a_n\varphi_n$$

即得

$$\left\|\frac{u-u_h}{h^2}-\Phi\right\|_{L^2(\Omega)}^2\leqslant\left\{\sum_{|n|\leqslant M}\left(\frac{a_n-a_n^h}{h^2}-B_n\right)^2+\sum_{|n|>M}A_n^2\right.$$
$$\left.+\sum_{|n|>M}B_n^2+\sum_{|n|>N-1}C_n^2\right\}\leqslant 4\varepsilon.$$

证毕.

为使主要定理的证明不致太长，再证明一个辅助引理。

辅助引理. 设 $f\in C^2(\bar{\Omega})$，令

$$Q=h^{-2}\sum_{r,s=1}^{N-1}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}[f\varphi_n(rh+x,sh+y)-f\varphi_n(rh,sh)]dxdy,$$

则

$$|Q|\leqslant C\left(1+\frac{n_1}{n_2}+\frac{n_2}{n_1}\right)$$

成立.

证明. 利用泰勒公式

$$g(1)=g(0)+g'(0)+\int_0^1 g''(t)(1-t)dt,$$

并令 $g(t)=f\varphi_n(\xi,\eta)$，$\xi=rh+tx$，$\eta=sh+ty$，则有

$$Q=h^{-2}\int_0^1(1-t)dt\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sum_{r,s=1}^{N-1}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 g(\xi,\eta)dxdy. \tag{10}$$

令 $H(x,y,t)$ 表示上述积分号下的和式，则有

$$H(x,y,t)=x^2\sum_{r,s=1}^{N-1}\frac{\partial^2(f\cdot\varphi_n)}{\partial x^2}(\xi,\eta)+2xy\sum_{r,s=1}^{N-1}\frac{\partial^2(f\cdot\varphi_n)}{\partial x\partial y}(\xi,\eta)$$
$$+y^2\sum_{r,s=1}^{N-1}\frac{\partial^2(f\cdot\varphi_n)}{\partial y^2}(\xi,\eta). \tag{11}$$

现在只需证明:

$$\max_{\substack{|x|\leqslant\frac{h}{2},\ |y|\leqslant\frac{h}{2}\\ 0\leqslant t\leqslant 1}}|H(x,y,t)|\leqslant C\left(1+\frac{n_1}{n_2}+\frac{n_2}{n_1}\right). \tag{12}$$

下面估计(11)中第一项，其余两项类似. 展开(11)中第一项:

$$x^2\sum_{r,s=1}^{N-1}\frac{\partial^2(f\cdot\varphi_n)}{\partial x^2}(\xi,\eta)=x^2\sum\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi,\eta)\sin n_1\pi\xi\sin n_2\pi\eta$$
$$+2x^2n_1\pi\sum\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)\cos n_1\pi\xi\sin n_2\pi\eta$$
$$-x^2n_1^2\pi^2\sum f(\xi,\eta)\sin n_1\pi\xi\sin n_2\pi\eta. \tag{13}$$

由 $f\in C^2(\bar{\Omega})$，(13)中第一项显然为

$$\left|x^2\sum_{r,s=1}^{N-1}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi,\eta)\sin n_1\pi\xi\sin n_2\pi\eta\right|\leqslant C,$$

$$|x|\leqslant\frac{h}{2},\ |y|\leqslant\frac{h}{2},\ 0\leqslant t\leqslant 1.$$

下面利用 Abel 变换.

$$\sum_{k=1}^{N-1}\alpha_k u_k=\sum_{k=1}^{N-2}(\alpha_k-\alpha_{k+1})\sum_{l=1}^{k}u_l+\alpha_{N-1}\sum_{l=1}^{N-1}u_l, \tag{14}$$

以及三角公式

$$\sum_{l=1}^{k}\cos lx=\sin\frac{kx}{2}\cos\frac{k+1}{2}x\Big/\sin\frac{x}{2}, \tag{14.a}$$

$$\sum_{l=1}^{k}\sin lx = \sin\frac{kx}{2}\sin\frac{(k+1)x}{2}\Big/\sin\frac{x}{2} \tag{14.b}$$

来处理(13)中其余两项. 令 G 表示 f 或其一阶导数，考虑

$$R_{ij}=\sum_{r,s=1}^{N-1}G(\xi,\eta)T_i(n_1\pi\xi)T_j(n_2\pi\eta),\quad i,j=1,2,$$

其中 T_1, T_2 分别为正弦或余弦函数. 把三角函数展开，可发现

$$|R_{ij}|\leqslant\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\left|\sum_{r,s=1}^{N-1}G(\xi,\eta)T_\alpha(n_1\pi rh)T_\beta(n_2\pi sh)\right|, \tag{15}$$

于是，只要考虑(15)右端的第一项，其余三项类似. 利用(14)及(14.b)，有

$$\begin{aligned}\sum_{r,s=1}^{N-1}G(\xi,\eta)\sin n_1\pi rh\sin n_2\pi sh &= \sum_{r=1}^{N-1}\sin n_1\pi rh\sum_{k=1}^{N-2}(G(rh+tx,\ kh+ty)\\
&-G(rh+tx,(k+1)h+ty))\cdot\frac{\sin\frac{kn_2\pi h}{2}\sin\frac{(k+1)n_2\pi h}{2}}{\sin\frac{n_2\pi h}{2}}\\
&+\sum_{r=1}^{N-1}\sin n_1\pi rhG(rh+tx,\ (N-1)h+ty)\cdot\frac{\sin\frac{(N-1)n_2\pi h}{2}\sin\frac{Nn_2\pi h}{2}}{\sin\frac{n_2\pi h}{2}}\\
&=\frac{1}{\sin\frac{n_2\pi h}{2}}\cdot\sum_{k=1}^{N-2}\sin\frac{kn_2\pi h}{2}\sin\frac{(k+1)n_2\pi h}{2}\\
&\quad\sum_{r=1}^{N-1}\sin n_1\pi rh\int_{(k+1)h+ty}^{kh+ty}\frac{\partial G}{\partial y}(rh+tx,\ y)dy\\
&+\frac{\sin\frac{(N-1)n_2\pi h}{2}\sin\frac{n_2\pi}{2}}{\sin\frac{n_2\pi h}{2}}\cdot\sum_{r=1}^{N-1}G(rh+tx,(N-1)h+ty)\sin n_1\pi rh.\end{aligned} \tag{16}$$

当 G 表示 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 时，$G\in C^1(\bar{\Omega})$，即可证明

$$|R_{ij}|\leqslant C\cdot\frac{1}{n_2h^2},\quad i,j=1,2. \tag{17.a}$$

与此类似，当 G 表示 f 时，$G\in C^2(\bar{\Omega})$，对(16)右端两项再作一次 Abel 变换，便得

$$|R_{ij}|\leqslant C\cdot\frac{1}{n_1n_2h^2},\quad i,j=1,2. \tag{17.b}$$

由此易见

$$\left|2x^2n_1\pi\sum_{r,s=1}^{N-1}\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)\cos n_1\pi\xi\sin n_2\pi\eta\right|\leqslant C\cdot\frac{n_1}{n_2},$$

$$|x| \leqslant \frac{h}{2},\ |y| \leqslant \frac{h}{2},\ 0 \leqslant t \leqslant 1;$$

$$\left| x^2 n_1^2 \pi^2 \sum_{r,s=1}^{N-1} f(\xi, \eta) \sin n_1 \pi \xi \sin n_2 \pi \eta \right| \leqslant C \cdot \frac{n_1}{n_2},$$

$$|x| \leqslant \frac{h}{2},\ |y| \leqslant \frac{h}{2},\ 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

据此得估计式(12). 辅助引理显然得证.

定理. 设 $f \in C^2(\bar{\Omega})$, u, u_h 分别是问题(1),(5)的解,则有

$$\lim_{h \to 0} \left\| \frac{u - u_h}{h^2} - \Phi \right\|_{L^2(\Omega)} = 0, \tag{18}$$

其中 $\Phi = \sum_n B_n \varphi_n$,

$$B_n = \frac{2}{3} \frac{n_1^2 n_2^2}{(n_1^2 + n_2^2)^2} \int_\Omega f \varphi_n dxdy + \frac{1}{3\pi^2} \frac{1}{(n_1^2 + n_2^2)} \int_\Omega \Delta f \varphi_n dxdy. \tag{18.a}$$

证明. 从(4)及 (2.a) 即知,引理中的条件(1)成立. 由 u 及 u_h 的表达式(4)和(9),有

$$\frac{a_n - a_n^h}{h^2} = \frac{f_n}{\lambda_n \lambda_n^h} \cdot \frac{\lambda_n^h - \lambda_n}{h^2} + \frac{1}{\lambda_n^h} \cdot \frac{f_n - f_n^h}{h^2}. \tag{19}$$

从 (2.a), (7.a) 即可推得

$$\lim_{h \to 0} \frac{\lambda_n^h - \lambda_n}{h^2} = -\frac{\pi^4}{12}(n_1^4 + n_2^4). \tag{20}$$

当 $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ 时, $\sin x \geqslant \frac{2}{\pi} x$ 及 $\sin x \geqslant x - \frac{x^3}{3!}$, 再由 λ_n, λ_n^h 的表达式,可证

$$\left| \frac{\lambda_n^h - \lambda_n}{\lambda_n \lambda_n^h h^2} \right| \leqslant C \frac{n_1^4 + n_2^4}{(n_1^2 + n_2^2)^2}. \tag{20.a}$$

从 (3.a) 及 (8.a), 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \frac{f_n - f_n^h}{h^2} &= h^{-2} \int_\Omega f \cdot \varphi_n dxdy - \sum_{r,s=1}^{N-1} f\varphi_n(rh, sh) \\ &= I_1 + I_2 + I_3, \end{aligned} \tag{21}$$

其中

$$I_1 = h^{-2} \left[\left(\int_0^{h/2} \int_0^{h/2} + \int_0^{h/2} \int_{1-\frac{h}{2}}^1 + \int_{1-\frac{h}{2}}^1 \int_0^{h/2} + \int_{1-\frac{h}{2}}^1 \int_{1-\frac{h}{2}}^1 \right) f \cdot \varphi_n dxdy \right], \tag{21.a}$$

$$I_2 = h^{-2} \left[\left(\int_0^1 \int_0^{h/2} + \int_0^1 \int_{1-\frac{h}{2}}^1 + \int_0^{h/2} \int_0^1 + \int_{1-\frac{h}{2}}^1 \int_0^1 \right) f \cdot \varphi_n dxdy \right], \tag{21.b}$$

$$I_3 = h^{-2} \left[\sum_{r,s=1}^{N-1} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-h/2}^{h/2} (f\varphi_n(rh + x, sh + y) - f\varphi_n(rh, sh)) dxdy \right]. \tag{21.c}$$

I_1 中每一项的绝对值都小于 $h^{-2} \max\limits_{(x,y) \in \Omega} |f| \cdot \frac{n_1 \pi h}{2} \cdot \frac{n_2 \pi h}{2} \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2$, 故有

$$|I_1| \leqslant C n_1 n_2 h^2 \leqslant C \tag{22}$$

及

$$\lim_{h\to 0} I_1 = 0. \tag{22.a}$$

考虑 I_2 的第一项，有

$$h^{-2}\int_0^1 dy\int_0^{h/2} f\cdot\varphi_n dx = h^{-2}\int_0^1 dy\int_0^{h/2} f(0,y)\sin n_1\pi x\sin n_2\pi y dx$$

$$+ h^{-2}\int_0^1 dy\int_0^{h/2}\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y)\cdot x\sin n_1\pi x\sin n_2\pi y dx$$

$$= \frac{n_1\pi}{8}\int_0^1 f(0,y)\sin n_2\pi y dy + O(h). \tag{23}$$

由 $f\in C^2(\bar{\Omega})$，对上式进行分部积分之后，得到估计

$$\left|h^{-2}\int_0^1\int_0^{h/2} f\cdot\varphi_n dxdy\right| \leqslant C\left(\frac{n_1}{n_2}+1\right). \tag{24}$$

与此类似，I_2 的第二项为

$$h^{-2}\int_0^1 dy\int_{1-\frac{h}{2}}^1 f\cdot\varphi_n dx = \frac{n_1\pi}{8}\cdot(-1)^{n_1+1}\int_0^1 f(1,y)\sin n_2\pi y dy + O(h).$$

与(23)合并，得

$$h^{-2}\left[\int_0^1\int_0^{h/2} + \int_0^1\int_{1-\frac{h}{2}}^1\right] = -\frac{n_1\pi}{8}\int_{\partial\Omega} f\cos n_1\pi x\sin n_2\pi y dy + O(h)$$

$$= -\frac{n_1\pi}{8}\int_\Omega\frac{\partial}{\partial x}(f\cos n_1\pi x\sin n_2\pi y)dxdy + O(h)$$

$$= \frac{n_1^2\pi^2}{8}\int_\Omega f\cdot\varphi_n dxdy - \frac{n_1\pi}{8}\int_\Omega\frac{\partial f}{\partial x}\cos n_1\pi x\sin n_2\pi y dxdy + O(h)$$

$$= \frac{n_1^2\pi^2}{8}\int_\Omega f\cdot\varphi_n dxdy + \frac{1}{8}\int_\Omega\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\varphi_n dxdy + O(h). \tag{25}$$

对 I_2 的后两项，可得类似于(25)的等式，从而

$$\lim_{h\to 0} I_2 = \frac{\pi^2(n_1^2+n_2^2)}{8}\cdot\int_\Omega f\cdot\varphi_n dxdy + \frac{1}{8}\int_\Omega\Delta f\cdot\varphi_n dxdy. \tag{26}$$

另外，对 I_2 的另外三项，可作类似于(24)的估计，从而有

$$|I_2| \leqslant C\left(1+\frac{n_1}{n_2}+\frac{n_2}{n_1}\right). \tag{27}$$

对 I_3，利用假设 $f\in C^2(\bar{\Omega})$ 并作泰勒展开，得

$$I_3 = \sum_{r,s=1}^{N-1}\frac{\Delta(f\varphi_n)(rh,sh)}{24}h^2 + o(1)$$

$$= \frac{1}{24}\int_{h/2}^{1-\frac{h}{2}}\int_{h/2}^{1-\frac{h}{2}}\Delta(f\cdot\varphi_n)dxdy + o(1).$$

取极限并利用格林公式，得

$$\lim_{h\to 0} I_3 = \frac{1}{24}\int_\Omega\Delta(f\cdot\varphi_n)dxdy$$

$$= \frac{1}{24}\int_{\Omega}(\Delta f\varphi_n + 2\nabla f\nabla\varphi_n + f\Delta\varphi_n)dxdy$$

$$= -\frac{\lambda_n}{24}\int_{\Omega} f\cdot\varphi_n dxdy - \frac{1}{24}\int_{\Omega}\Delta f\varphi_n dxdy. \tag{28}$$

再由前面的辅助引理及(22),(27),并注意到 $|\lambda_n^h| \geqslant 4(n_1^2 + n_2^2)$, 即得

$$\left|\frac{1}{\lambda_n^h}\frac{f_n - f_n^h}{h^2}\right| \leqslant C\cdot\frac{1}{(n_1^2 + n_2^2)}\left(1 + \frac{n_1}{n_2} + \frac{n_2}{n_1}\right) \leqslant C\cdot\frac{1}{n_1 n_2}. \tag{29}$$

由(19),(20.a) 及(29),得

$$\left|\frac{a_n - a_n^h}{h^2}\right| \leqslant C\left(|f_n| + \frac{1}{n_1 n_2}\right). \tag{30}$$

因 $\sum_n |f_n|^2$ 及 $\sum_n \frac{1}{n_1^2 n_2^2}$ 收敛,故引理中的条件(2)成立.

由 (19)、(20)、(22.a),(26),(28) 即知,满足引理的条件 (3) 并得到 B_n 的表达式(18.a). 至此即可由引理推知本定理成立.

注 1. 容易证明,对离散化方程 (5.a) 的情形,上述定理仍然成立,只是 (18) 中的函数 Φ 修改为 $\Phi + \Psi$, Ψ 是方程

$$\begin{cases}\Delta\Psi = D(x, y), & (x, y)\in\Omega,\\ \Psi|_{\partial\Omega} = 0\end{cases}$$

的解(由 $f\in C^2(\bar{\Omega})$, 有 $D\in C^0(\bar{\Omega})$, 故方程有解).

注 2. 可将定理的结果推广到方程 $-\Delta u + au = f$ (常数 $a > 0$)和第二边值问题.

注 3. [7]中通过数值试验,表明 L 形区域波哇松方程有渐近展开,第一项的幂次为 $h^{4/3}$. 这与特征值渐近展开的猜想[8]是一致的. 如果能从理论上证明 [8] 的猜想,则利用 [9] 中有关特征值理论及本文引理所提供的框架,即可证明: 对 L 形区域的波哇松方程,有如下结果: 存在 $\Phi\in L^2(\Omega)$, 使

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{u - u_h}{h^{4/3}} - \Phi\right\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

参 考 文 献

[1] 黄鸿慈,刘贵银,解椭圆边值问题的逐步加密法,计算数学,1978 年第 2 期和第 3 期.

[2] Lin Qun, J. Q. Liu, Extrapolation method for Fredholm integral equation with non-smooth kernels, *Numer. Math.*, 35(1980), 459—464.

[3] 陈传淼,Galerkin 解的外推法,湘潭大学自然科学学报,4(1981),1—6.

[4] G. Marchuk, V. Shaudurov, Difference Methods and Its Extrapolation, Springer-Verlag, 1983.

[5] Lin Qun, Lü Tao, Shen Shu-min, Maximum norm estimate, extrapolation and optimal points of stresses for the Finite Element Methods on the strongly regular triangulation, *J. Comp. Math.*, 1: 4(1983), 376—383.

[6] Lin Qun, Wang Jum-ping, Some Expansions of the Finite Element Approximation, Cheng du Branch of Academia Sinica, 1984.

[7] 黄鸿慈,穆默,韩渭敏,低光滑解的外推,待发表.

[8] G. E. Forsythe, W. R. Wasow, Finite-Difference Methods for Partial Differential Equations, John Wiley and Sons, Inc., 1960, 351—352.

[9] R. Courant, D. Hilbert, 数学物理方法,第 1 卷,1953.